Mécanique des fluides

Section de génie civil

TD 7 - Correction

Exercices

Exercice 1 On s'intéresse au débit Q s'écoulant dans une conduite circulaire de diamètre $d = 1000$ mm. La conduite est en béton et le coefficient de Manning-Strickler vaut $K = 80$ m$^{1/3}$s^{-1}. La pente vaut $i = 0,1$ %. Le tirant d'eau (c.-à-d. la profondeur d'eau maximale) observé est $h_{max} =$ 80 cm.

1. Dessiner une coupe en travers de la conduite et indiquer le tirant d'eau h_{max}, la largeur au miroir B, le périmètre mouillé χ ainsi que la section mouillée S.
2. L'écoulement est-il *à surface libre* ou *en charge* ? Rappeler la force motrice de l'écoulement dans chacun des cas.
3. Calculer le périmètre mouillé χ, la section mouillée S et le rayon hydraulique R_H.
4. Exprimer Q en fonction de S, R_H, i et K selon la loi de Manning-Strickler. Rappeler dans quel régime la loi de Manning-Strickler est-elle valide. Est-ce le cas ici ?
5. Calculer Q selon la loi de Manning-Strickler.

Exercice 2 Soit un débit Q s'écoulant dans un canal de section triangulaire. A l'état neuf, le niveau d'eau correspondait à la marque $L_1 = 2$ m sur la paroi du canal (voir figure 1). Après plusieurs années d'utilisation, la rugosité du canal a augmentée et le coefficient de Manning-Strickler K a diminué de moitié. Calculer la valeur de la nouvelle marque L_2 sur la paroi du canal.

Exercice 3 Soit un canal rectangulaire de largeur constante où s'écoule de l'eau à un débit par unité de largeur $q = 0,52$ m^2/s. La hauteur d'eau à l'amont d'une rampe de 15 cm est $h_1 = 69$ cm (voir figure 2).

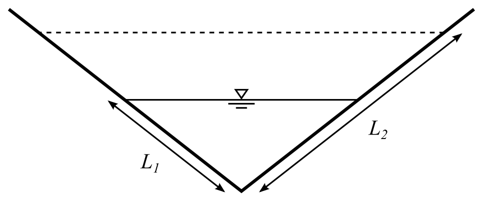

Figure 1 – coupe en travers du canal.

1. Rappeler la définition de la hauteur critique h_c, l'exprimer en fonction de q (partir de la formule du nombre de Froude) et la calculer.
2. Calculer la hauteur d'eau à l'aval de la rampe h_2 en utilisant le diagramme de la charge spécifique adimensionelle donné en cours (commencer par écrire la charge totale et la charge spécifique à l'amont et à l'aval de la rampe). On négligera les effets visqueux.

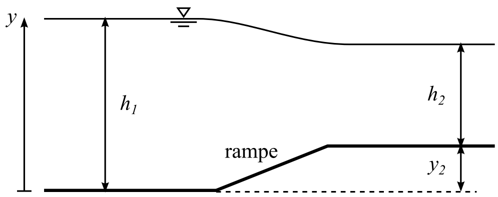

Figure 2 – profil en long de la rampe.

Exercice 4 Soit un écoulement d'eau en régime permanent uniforme dans un canal trapézoidal de base $b = 5$ m. La pente des berges est de 45°(voir figure 4). La hauteur d'eau observée est $h = 4$ m. Le coefficient de Manning-Strickler, qui décrit la rugosité du lit, vaut $K = 40$ m$^{1/3}$s^{-1}.

1. Calculer la largeur au miroir B, le périmètre mouillé χ, la section mouillée S et le rayon hydraulique R_H.
2. Sachant que le débit vaut $Q = 100$ m^3/s, calculer la pente i du canal.
3. Donner la hauteur normale h_n. La formule $h_n = (q/(K\sqrt{i}))^{3/5}$, dérivée de la loi de Manning-Strickler, est-elle valide ici (avec q le débit par unité de largeur) ? Justifier votre réponse.
4. Calculer le nombre de Froude. Le régime est-il subcritique (fluvial) ou supercritique (torrentiel) ?
5. Calculer la hauteur critique h_c puis la comparer avec h. Faire le lien avec la question précédente.

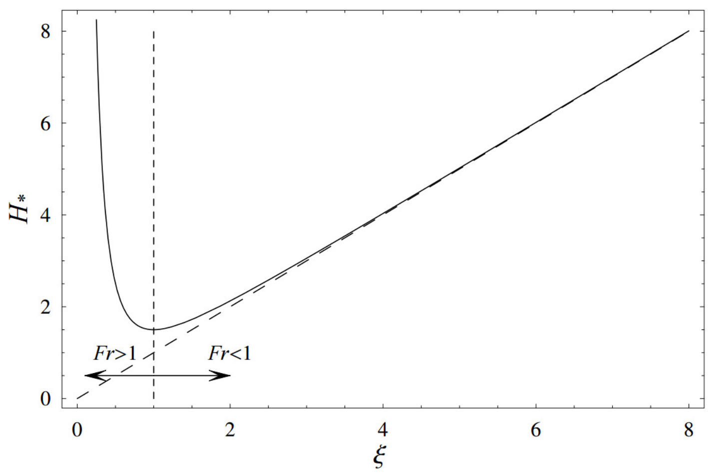

Figure 3 – variation de la charge spécifique, $H_* = H_s/h_c$ et $\chi = h/h_c$.

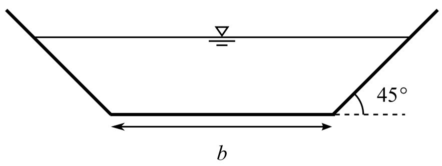

Figure 4 – coupe en travers du canal.

Exercice 5 Le long d'un canal de section rectangulaire, la hauteur d'eau h entre une section amont et une section aval est diminuée de moitié. Le nombre de Froude passe d'une valeur subcritique $\mathrm{Fr}_1 = 0,5$ à une valeur supercritique $\mathrm{Fr}_2 = 3$. Sachant que la largeur de la section amont est $B_1 =$ 4 m, déterminer la largeur B_2 de la section aval .

Exercice 6 Une rivière de montagne dont le lit est composé d'un gravier grossier (d_{90} = 200 mm), arrive en plaine avec une transition brusque de pente de fond : i_{am} = 20,0 % et i_{av} = 0,5 %. Sa largeur reste partout constante : B = 4 m. Le débit en crue de cette rivière est de Q = 6 m^3 s^{-1}. Un pont, s'élevant 2,50 m au-dessus du lit de la rivière, est situé 140 m en aval de la transition de pente. Voir figure 1.

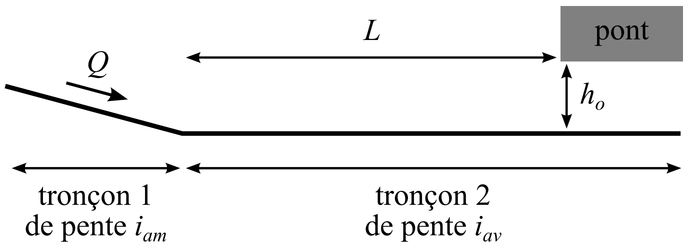

Figure 1 : schéma de l'aménagement.

1. Vérifier la sécurité du pont au passage de la crue.
2. Existe-il un ressaut hydraulique causé par la transition de pente ? Si oui, calculer sa position.

Indications :

— Pensez à estimer la rugosité du lit à l'aide du d_{90} et ainsi pouvoir utiliser une loi de frottement.

— Considérez les équations pour un canal infiniment large.

— Lorsqu'il y a passage brusque d'un régime supercritique à un régime subcritique, un ressaut se forme. Suivant les conditions hydrauliques, le ressaut peut se former dans la première partie de l'écoulement ou dans la seconde. Utiliser la méthode de la courbe conjuguée pour déterminer la position du ressaut

Exercice 7 Un canal rectangulaire de largeur $B = 5$ m et de longueur $l = 1000$ m a une pente $i = 10^{-3}$. Le débit vaut $Q = 10$ m^3/s et la hauteur d'eau est de $h_0 = 3,1$ m dans la partie du bief où la hauteur est uniforme. Ce canal débouche ensuite sur deux canaux secondaires de même section et de pente $i_s = 1$ % (voir figure 5).

1. En supposant que la résistance du lit peut être décrite à l'aide de la loi généralisée de Keulegan, déterminer la rugosité k_s du lit. On prendra $\kappa = 0,41$ pour la constante de von Kàrmàn. Discuter la validité de cette formule dans notre cas.
2. Répondre à la même question en prenant la loi de Manning-Strickler : que vaut le coefficient de Manning-Strickler K ?
3. Quel est le débit Q_1 correspondant à une hauteur d'eau $h_1 = 4,5$ m dans le canal principal ? On répondra en utilisant les lois de Keulegan et de Manning-Strickler.

4. Calculer le nombre de Froude Fr et le nombre de Reynolds Re pour le canal principal lorsque le débit vaut Q_1. On utilisera le débit trouvé avec loi de Manning-Strickler. Caractériser le régime d'écoulement.
   Rappel : pour les écoulements à surface libre, on utilise le rayon hydraulique R_H comme dimension caractéristique dans la définition du nombre de Reynolds. On utilise souvent Re $= 4R_H\bar{U}/\nu$, avec ν la viscosité cinématique du fluide et $\bar{U}$ la vitesse moyenne de l'écoulement.
5. Quelle est la hauteur d'eau h_2 dans les canaux secondaires pour un régime permanent uniforme lorsque la hauteur vaut h_1 dans le canal principal ? On négligera le coefficient de perte de charge singulière au niveau de l'embranchement et on se servira de la loi de Manning-Strikler.
6. Que vaut la hauteur critique h_c dans les canaux secondaires ?
7. Quelle est la forme de la surface libre ? La tracer qualitativement en plaçant les éléments remarquables.
8. On remplace les canaux secondaires par des canaux à section trapézoïdale de base $b = 3$ m. Le fruit des berges est 1 :3. Calculer la hauteur d'eau pour un canal secondaire en régime permanent uniforme lorsque le débit vaut Q_1. Calculer le nombre de Froude.

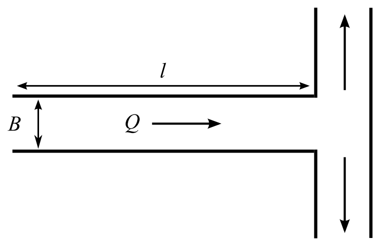

Figure 5 – vue en plan du canal principal se scindant en deux canaux secondaires.

Corrections

Exercice 1

1. Coupe en travers de la conduite cylindrique.

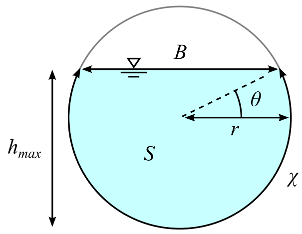

FIGURE 6 – coupe en travers de la conduite cylindrique.

2. L'hydraulique à surface libre se différencie de l'hydraulique en charge par l'existence d'une *surface libre*, c'est-à-dire d'une surface où l'écoulement est en contact direct avec l'atmosphère. La conduite n'étant que partiellement remplie d'eau, l'écoulement est bien à surface libre. La gravité est l'agent moteur des écoulements à surface libre, alors que, pour les écoulements en charge, c'est le gradient de pression.
3. Soit r le rayon de la conduite et θ l'angle tels que dessinés sur la figure 6, on a

$$\chi = r(\pi + 2\theta) = 2,21 \text{ m},$$

$$S = r^2(\frac{\pi}{2} + \theta + \sin\theta\cos\theta) = 0,67 \text{ m}^2,$$

$$R_H = \frac{S}{\chi} = 0,30 \text{ m}.$$

4. D'après la loi de Manning-Strickler,

$$Q = SR_H^{2/3}\sqrt{i}K$$

en régime permanent uniforme (c.-à-d. lorsque les caractéristiques de l'écoulement, comme la vitesse et la hauteur d'eau, ne varient ni dans le temps, ni le long de la direction d'écoulement). Ici, le débit est constant dans le temps et l'écoulement est établi ; le régime est donc permanent. La conduite est uniforme (toutes les sections en travers sont identiques) et il n'y a aucun ouvrage hydraulique susceptible de perturber l'écoulement, le régime est donc uniforme.
5. $Q = 0,77$ m^3/s.

Exercice 2 Soit S_1 la surface mouillée et R_{H1} le rayon hydraulique à l'état neuf ; et soit S_2 la surface mouillée et R_{H2} le rayon hydraulique à l'état érodé. La pente du canal est notée i et l'angle que fait chaque berge avec la verticale est noté θ.

Les surfaces mouillées peuvent s'écrire

$$S_1 = L_1^2 \cos\theta \sin\theta \text{ et } S_2 = L_2^2 \cos\theta \sin\theta$$

et les rayons hydrauliques peuvent s'écrire

$$R_{H1} = \frac{L_1^2 \cos\theta \sin\theta}{2L_1} \text{ et } R_{H2} = \frac{L_2^2 \cos\theta \sin\theta}{2L_2}.$$

Le régime étant permanent uniforme dans chacun des états, la loi de Manning-Strickler permet d'écrire

$$Q = S_1 R_{H1}^{2/3} \sqrt{i} K \text{ pour l'état neuf et } Q = S_2 R_{H2}^{2/3} \sqrt{i} \frac{K}{2} \text{ pour l'état érodé.}$$

En égalisant les deux expressions pour Q et en substituant les expressions pour les surfaces mouillées et les rayons hydrauliques, on trouve

$$L_2 = 2^{3/8} L_1 = 2,59 \text{ m.}$$

Exercice 3

1. La hauteur critique h_c est la hauteur d'eau lorsque le nombre de Froude $\mathrm{Fr} = \bar{u}/\sqrt{gh}$ vaut 1, avec $\bar{u}$ la vitesse moyenne de l'écoulement et h la hauteur d'eau. Puisque $\bar{u} = q/h$, avec q le débit par unité de largeur, on démontre facilement que $h_c = \sqrt[3]{q^2/g}$. Ici, $h_c = 0,30$ m.
2. La charge hydraulique totale s'écrit

$$H = y + h + \frac{q^2}{2gh^2}$$

avec y la cote du fond, h la hauteur d'eau et q le débit par unité de largeur. La charge totale représente l'énergie totale du fluide en un point donnée. Son expression est directement dérivée de l'équation de Bernoulli.

Puisque les effets visqueux sont négligés, la charge totale se conserve au passage de la marche. On peut donc écrire

$$y_1 + h_1 + \frac{q^2}{2gh_1^2} = y_2 + h_2 + \frac{q^2}{2gh_2^2},$$

avec l'indice $_1$ référant à la section amont et l'indice $_2$ à la section aval. En isolant h_2 dans cette équation, on obtient une équation

du troisième degré. Une alternative à la résolution de cette équation pour trouver h_2 est d'utiliser le diagramme de l'énergie spécifique adimensionnelle (donc vrai pour toute configuration) qui donne la charge spécifique H_s en fonction de la hauteur d'eau h. Le diagramme est disponible dans le cours.
La charge hydraulique spécifique s'écrit

$$H_s = h + \frac{q^2}{2gh^2}$$

et représente l'énergie totale du fluide à une cote donnée (l'énergie potentielle n'est pas prise en compte). En remaniant l'équation de la conservation de la charge totale, on peut écrire

$$(h_2 + \frac{q^2}{2gh_2^2}) = (h_1 + \frac{q^2}{2gh_1^2}) - (y_2 - y_1),$$

ou encore

$$H_{s2} = H_{s1} - (y_2 - y_1).$$

La différence de charge spécifique entre les points 1 et 2 est donc égale à la hauteur de la marche (c.-à-d. à la différence d'énergie potentielle entre les deux points). Il suffit maintenant de lire sur le diagramme la valeur de h_2.
Pour cela, on adimensionalise les différentes variables d'intérêt en les divisant par la hauteur critique h_c :

$$\xi_1 = \frac{h_1}{h_c} = 2,30\ ;$$

$$H_{*1} = \frac{H_{s1}}{h_c} = 2,39\ ;$$

$$H_{*2} = H_{s1}^{*} - \frac{y_2 - y_1}{h_c} = 1,89.$$

.

Par lecture graphique, on a $\xi_2 = 1,7$ ou $\xi_2 = 0,6$, soit $h_2 = 0,5$ m ou $h_2 = 0,2$ m (en multipliant par h_c). La première solution est la bonne, car pour la seconde si on suit la courbe cela voudrait dire au'il y aurait un gain d'énergie spécifique (car on remonte la courbe du diagramme pour arriver à H_{*2}). Or un gain d'énergie spécifique (donc gain d'énergie piézométrique ou cinétique) veut dire une perte d'énergie potentielle donc une diminution de la cote y, ce qui n'est pas le cas.

On retrouve le même résultat en résolvant l'équation du troisième degré (tirée de l'équation de la courbe)

$$H_{s2}^{*} = \xi_2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\xi_2^2}$$

pour ξ_2.

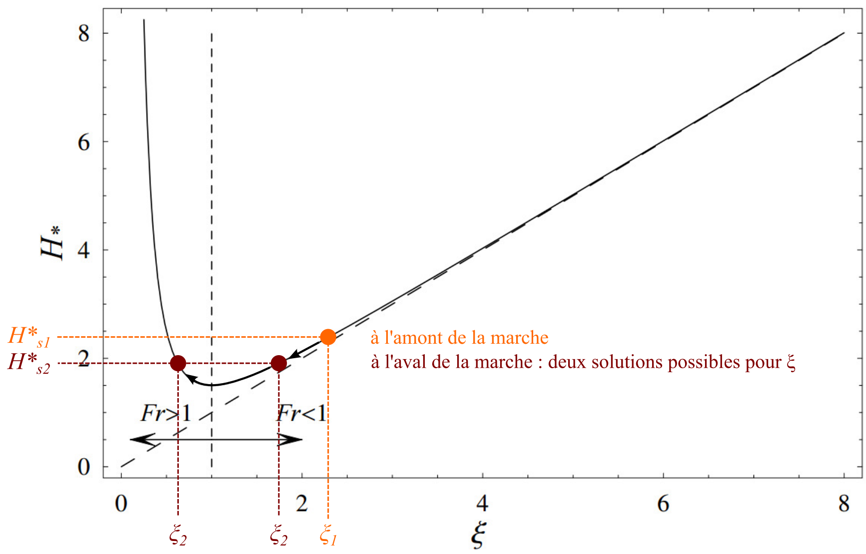

Figure 7 – variation de la charge spécifique au passage de la marche.

Exercice 4

1. $B = 13$ m, $\chi = 16,31$ m, $S = 36$ m^2 et $R_H = 2,21$ m.
2. L'écoulement étant permanent uniforme, la loi de Manning-Strickler donne
$$Q = SR_H^{2/3}\sqrt{i}K.$$
En résolvant pour i on trouve $i = 1,7 \cdot 10^{-3}$. La pente est de 0,17 %.
3. L'écoulement étant permanent uniforme, la hauteur d'eau h dans le canal est égale à la hauteur normale h_n. On a donc $h_n = 4$ m. La formule $h_n = (q/(K\sqrt{i}))^{3/5}$ n'est valide que pour des canaux infiniment larges (c.-à-d. lorsque B est très grand devant h), ce qui n'est pas le cas ici.
4. The general definition of the Froude number for shallow water flows is the following :

$$\mathrm{Fr} = \frac{Q}{S\sqrt{gS/B}}.$$

Using this definition and replacing the numerical values, the value is $\mathrm{Fr} = 0,53$. Puisque $\mathrm{Fr} < 1$, le régime est subcritique (fluvial).

5. La hauteur critique h_c est la hauteur d'eau quand $\mathrm{Fr} = 1$. Puique l'expression de Fr en fonction de h est ici

$$\mathrm{Fr} = \frac{Q}{(bh + h^2)^{3/2}}\sqrt{g/B},$$

on a

$$\frac{BQ^2}{gS^3} = 1 \text{ ou encore } \frac{(bh_c + h_c^2)^3}{b + 2h_c} - \frac{Q^2}{g} = 0.$$

En résolvant cette équation pour h_c avec la méthode de Newton ou autre, on trouve $h_c = 2,83$ m.

Puisque $h > h_c$, le régime est subcritique. Ce résultat était attendu au vu de la réponse à la question précédente.

Exercice 5 Le canal est de section rectangulaire. Puisque

$$\mathrm{Fr} = \frac{BQ^2}{S\sqrt{gS/B}} == \frac{Q}{Bh\sqrt{gh}},$$

on a

$$Q = Bh\sqrt{gh}\mathrm{Fr}.$$

En égalisant les débits des sections amont et aval, on obtient

$$B_1 h\sqrt{gh}\mathrm{Fr}_1 = B_2\frac{h}{2}\sqrt{g\frac{h}{2}}\mathrm{Fr}_2.$$

En résolvant pour B_2 on trouve $B_2 = 1,89$ m.

Exercice 6

1. On suppose que $h = h_n$ au niveau du pont. En utilisant la formule de Jäggi, on calcule $K = 23,2/d_{90}^{1/6} = 30\ \mathrm{m}^{1/3}\,\mathrm{s}^{-1}$. L'équation de Manning-Strickler pour un canal infiniment large permet d'écrire :

$$h_{n2} = \left(\frac{Q}{BK\sqrt{i_{av}}}\right)^{3/5} = 0,81 \text{ m.} \quad (1)$$

On trouve $h_{n2} < h_0$, donc la sécurité du pont est assurée. Note : comme 1,3 m est du même ordre de grandeur que B l'hypothèse du canal infiniment large est discutable, ici on l'a choisie uniquement pour simplifier les calculs.

2. On détermine tout d'abord le régime d'écoulement pour les tronçons 1 (amont) et 2 (aval). Pour cela on calcule la hauteur normale h_{n1} dans le tronçon 1 et la hauteur critique h_c (hauteur d'eau pour Fr = 1) :

$$h_{n1} = \left(\frac{Q}{BK\sqrt{i_{am}}} \right)^{3/5} = 0,27 \text{ m} \tag{2}$$

$$h_c = \left(\frac{Q}{B\sqrt{g}} \right)^{2/3} = 0,61 \text{ m} \tag{3}$$

On trouve $h_{n1} < h_c < h_{n2}$ m. L'écoulement passe donc d'un régime supercritique à un régime subcritique, il y a donc un ressaut qui se forme au changement de régime. Dans la zone où se produit le ressaut, l'écoulement est très turbulent, localement la hauteur d'eau peut être importante avec une forte érosion. On va donc déterminer la position du ressaut. Pour ce faire on va utiliser la méthode de conjugaison. Il faut commencer par tracer l'allure des courbes de remous en résolvant l'équation de Bresse pour une loi de Manning-Strickler (équation 5.12 p. 109 du cours)

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{1 - (h_n/h)^{10/3}}{1 - (h_c/h)^3}. \tag{4}$$

Dans le premier tronçon l'écoulement est partout supercritique car $h_{n1} < h_c$, le ressaut n'y aura pas lieu. Le ressaut va se situer quelque part dans le deuxième tronçon, nous allons donc tracer la courbe de remous afin d'estimer à quel endroit aura lieu le ressaut. On doit donc résoudre numériquement l'équation 4. La résolution de cette équation peut se faire de plusieurs manières numériquement, soit avec l'outil de Matlab ode45 ou alors en utilisant les différences finies. On va utiliser les différences finies.

On rappel la définition de la dérivée

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}. \tag{5}$$

Si l'on considère un fonction f définie sur un intervalle donné et que l'on subdivise cet intervalle en N sous-intervaux de dimensions finie δ (le pas d'espace), alors la fonction f est définie en chaque point k de cet intervalle. On peut alors réécrire l'équation (5)

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = \frac{f^{(k+1)}(x) - f^{(k)}(x)}{\delta} \tag{6}$$

ou $f^{(k+1)}(x)$ ($f^{(k)}(x)$) est la fonction f évaluée au point $k+1$ (k) du domaine discrétisé. Ceci est un schéma dit progressif de différences finies ou la condition limite est évaluée en amont. L'équation (4) peut être discrétisée et s'écrit de la manière suivante

$$h^{(k+1)} = h^{(k)} + \delta\left(i\frac{1-(h_n/h^{(k)})^{10/3}}{1-(h_c/h^{(k)})^3}\right). \tag{7}$$

On va considérer que la hauteur initiale correspond à la condition de bord, soit $h^{(0)} = h_{n1} = 0,27$ m. De plus on considère le pas d'espace $\delta = 1$ m.

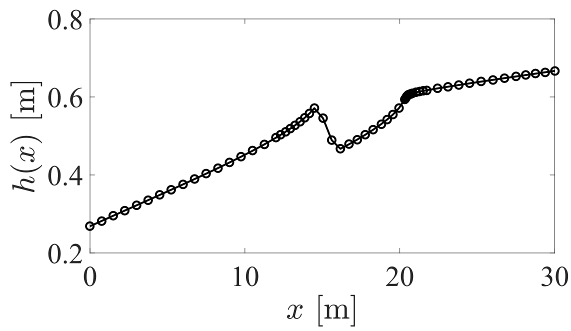

FIGURE 8 – Solution numérique de l'équation de remous dans la deuxième partie

On voit sur la figure 8 que la résolution numérique diverge autour de $x = 20$ m, c'est-à-dire quand $h \to 0,61$ m qui est la hauteur critique. On va donc maintenant calculer la hauteur conjuguée par la formule de conjugaison

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8\mathrm{Fr}_1^2}-1\right) \tag{8}$$

avec $\mathrm{Fr}_1 = q/(\sqrt{gh_1^3})$. Cette courbe est présentée sur la figure 9.

Il faut maintenant déterminer le point d'intersection entre la courbe conjuguée et la courbe de remous en aval du ressaut. Cette courbe se calcule en résolvant l'équation 4 en régime subcritique, car on sait qu'après le ressaut hydraulique l'écoulement change de régime. Il nous faut donc une condition limite à l'aval loin du ressaut, par exemple $h_0 = h_{n2} = 1,3$ m en $x = 20$ m (au niveau du pont). On utilise à nouveau l'outil ode45 de Matlab. On peut voir les courbes sur la figure 10.

On peut voir qu'après le ressaut l'écoulement est partout à hauteur normale. On va maintenant chercher la position de l'intersection

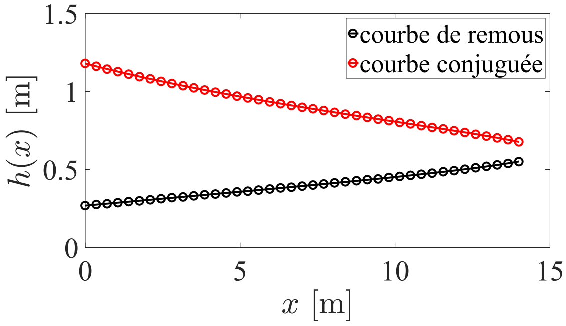

FIGURE 9 – Solution numérique de l'équation de remous dans la deuxième partie avec sa courbe conjuguée

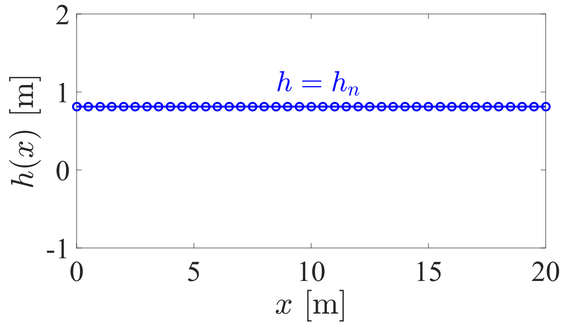

FIGURE 10 – Solution numérique de l'équation de remous en aval du ressaut avec sa courbe conjuguée

entre les courbes de remous et les conjugués. Le résultat est présenté sur la figure 11. Graphiquement on estime donc la position du ressaut à $x_r = 10$ m.

Exercice 7 Rappel : on note h_n la hauteur normale, h_c la hauteur critique, $\bar{u}$ la vitesse moyenne de l'écoulement, S la section mouillée, χ le périmètre mouillé et R_H le rayon hydraulique.

1. La formule généralisée de Keulegan permet d'exprimer la contrainte à la paroi τ_p (c.-à.-d. le frottement au fond) en fonction de la hauteur d'eau h et de la vitesse moyenne de l'écoulement $\bar{u}$:

$$\tau_p = \frac{\kappa^2}{\ln^2(\frac{11h}{k_s})}\varrho\bar{u}^2.$$

En régime permanent uniforme, le frottement au fond reprend le poids de la colonne d'eau (qui est la force motrice de l'écoulement) et

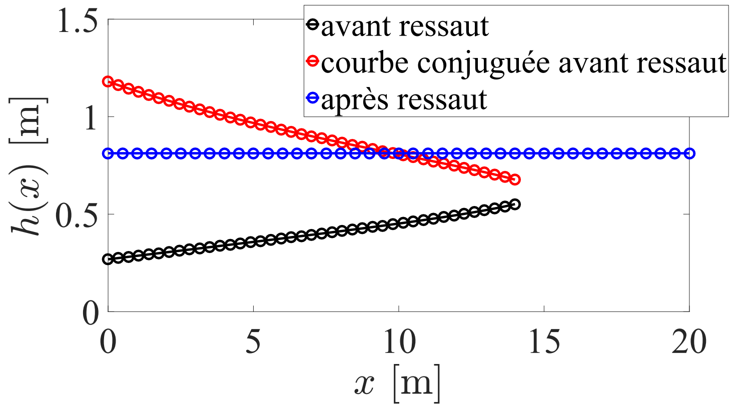

Figure 11 – Solution numérique de l'équation de remous en aval du ressaut avec sa courbe conjuguée

on peut écrire que $\tau_p = \rho g R_h \sin\theta \approx \rho g R_H i$ pour des pentes faibles, avec θ l'angle du fond avec l'horizontale et i la pente du fond. Ici, on ne peut pas faire l'approximation $R_H \approx h$ car le canal ne peut pas être considéré comme infiniment large.

Pour $h = h_0$, on a $\bar{u} = Q/Bh_0$ et $R_H = h_0 B/(2h_0 + B)$. On peut donc écrire

$$\rho g R_H i = \frac{\kappa^2}{\ln^2(\frac{11 R_H}{k_s})} \rho \frac{Q^2}{B^2 h_0^2},$$

ou encore

$$k_s = 11 R_H \exp\left(\pm\sqrt{\frac{\kappa^2}{g R_H i} \frac{Q^2}{B^2 h_0^2}}\right).$$

On trouve $k_s = 1,56$ m (l'autre solution de l'équation, $k_s = 147,44$ m, n'est pas réaliste, on rappelle que $k_s \approx 2d_{90}$).

On remarque que $h/k_s < 10$. La formule généralisée de Keulegan est donc valide dans notre cas. Cependant, il faut garder à l'esprit que cela ne signifie pas qu'elle est forcément la loi la plus adaptée.

2. D'après la loi de Manning-Strickler, $Q = S R_H^{2/3} \sqrt{i} K$. Ici, $S = Bh_0$ et $R_H = h_0 B/(2h_0 + B)$. En résolvant pour K on trouve $K = 16,5$ m$^{1/3}$s^{-1}. Cette valeur indique que le canal est très rugueux.
3. En utilisant $k_s = 1,56$ m et $K = 16,5$ m$^{1/3}$s^{-1} on trouve

$$Q_1 = \sqrt{\frac{B^2 h_1^2 g R_H i \ln^2(\frac{11 R_H}{k_s})}{\kappa^2}} = 17,1 \text{ m}^3/\text{s}$$

pour la formule généralisée de Keulegan et

$$Q_1 = KR_H^{2/3}\sqrt{i}Bh_1 = 16,1 \text{ m}^3/\text{s}$$

pour la loi de Manning-Strickler.

4. On trouve
$$\mathrm{Fr} = \frac{Q_1}{Bh_1\sqrt{gh_1}} = 0,11$$
qui indique un écoulement subcritique (fluvial) et
$$\mathrm{Re} = \frac{4R_H\bar{\mathrm{u}}}{\nu} = 5\cdot 10^9$$
qui indique un écoulement turbulent.
5. Le débit dans chacun des canaux secondaires vaut $Q_1/2$. En appliquant la loi de Manning-Strickler dans un des canaux secondaires on peut donc écrire
$$\frac{Q_1}{2} = KR_H^{2/3}\sqrt{i_s}Bh_2.$$
En exprimant R_H en fonction de h_2 et en résolvant pour h_2, on trouve $h_2 = 3,73$ m.
6. En partant de la définition de la hauteur critique et de la formule du nombre de Froude on trouve
$$h_c = \left(\frac{Q_1/2}{B\sqrt{g}}\right)^{2/3} = 0,64 \text{ m}.$$
On remarque que $h_2 > h_c$ dans les canaux secondaires, ce qui indique que le régime est subcritique (fluvial). Le régime ne change donc pas du canal principal aux canaux secondaires. Il n'y a ni chute (passage de fluvial à torrentiel) ni ressaut hydraulique (passage de torrentiel à fluvial).
7. Doivent figurer sur le schéma la hauteur d'eau h (c.-à.-d. la surface libre), la hauteur normale h_n et la hauteur critique h_c pour chaque bief ; ainsi que les éventuels ouvrages hydrauliques et ressauts hydrauliques.

   Ici, de l'amont vers l'aval,
   - $h = h_n$ loin de l'embranchement (régime permanent uniforme) ;
   - $h_c < h < h_n$ à l'approche de l'embranchement (la hauteur diminue mais il n'y a pas de changement de régime, c.-à.-d. que h ne croise pas h_c) ;
   - après le changement de pente, h tend vers la nouvelle valeur de h_n (le régime redevient permanent uniforme loin de l'embranchement).

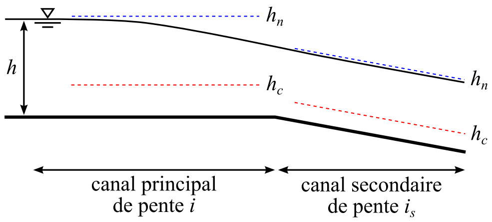

Figure 12 – courbe de remous qualitative au passage du canal principal aux canaux secondaires.

Puisque le régime est subcritique (fluvial) dans les deux biefs, h et h_n sont toujours au dessus de h_c.

8. Par soucis de simplification, on note ici Q le débit, h la hauteur d'eau et i la pente dans chacun des canaux secondaires.
Dans le cas de la section trapézoïdale on a
$S = h(b+3h)$ pour la section mouillée,
$\chi = b + 2h\sqrt{10}$ pour le périmètre mouillé et
$R_H = \frac{h(b+3h)}{b+2h\sqrt{10}}$ pour le rayon hydraulique.
La loi de Manning-Strickler permet d'écrire

$$Q^2 - S^2 R_H^{4/3} K^2 i = 0$$

On note $f(h)$ cette fonction. La solution peut être approximée par la méthode itérative de Newton qui dit que

$$h_{n+1} = h_n - \frac{f(h_n)}{f'(h_n)}.$$

On calcule donc $f'(h)$:

$$f'(h) = -2\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}h} \cdot S R_H^{4/3} K^2 i - \frac{4}{3} S^2 \frac{\mathrm{d}R_h}{\mathrm{d}h} R_h^{1/3} K^2 i$$

d'où

$$f'(h) = -K^2 i S \left(2\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}h} R_H^{4/3} + \frac{4}{3} S \frac{\mathrm{d}R_h}{\mathrm{d}h} R_h^{1/3} \right)$$

avec

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}h} = b + 6h$$

et

$$\frac{\mathrm{d}R_h}{\mathrm{d}h} = \frac{b^2 + 6hb + 12h^2\sqrt{10} - 6h\sqrt{10}}{(b+2h\sqrt{10})^2}.$$

La valeur initiale h_0 de h est obtenu avec l'hypothèse d'un canal infiniment large ($R_h \approx h$) et d'une section rectangulaire simple ($S = bh$). Pour $Q = 8$ m^3/s, $K = 16,5$ m$^{1/3}$s^{-1}, $i = 0,01$ et $b = 3$ m, on trouve

$$h_0 = \left(\frac{Q^2}{b^2K^2i}\right)^{3/10} = 1,38 \text{ m}.$$

On iterre ensuite jusqu'à convergence de h_{n+1} :

$$h_1 = h_0 - \frac{f(h_0)}{f'(h_0)} = 1,1335 \text{ m},$$

$$h_2 = h_1 - \frac{f(h_1)}{f'(h_1)} = 1,0695 \text{ m},$$

$$h_3 = 1,0751 \text{ m}, \; h_4 = 1,0741 \text{ m, etc.}$$

Astuce : il est utile d'utiliser la touche ANS de sa calculatrice à la place de h pour automatiser le calcul : >> ANS − f(ANS)/f'(ANS).

h converge vers 1,07 m. Le nombre de Froude vaut 0,37, le régime est subcritique (fluvial).